[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題248]

次の関数 $f(x)$ について，与えられた x の値における微分係数を定義に従って求めよ。

(1) $f(x)=\sqrt{2x}$ $(x=1)$　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $(x=3)$

解答 (1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(2) $-\dfrac{1}{6\sqrt{3}}$

解説

(1) $f'(1)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{2(1+h)}-\sqrt{2}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{2(1+h)-2}{h(\sqrt{2(1+h)}+\sqrt{2})}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{2}{\sqrt{2(1+h)}+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $f'(3)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3+h}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3+h}}{\sqrt{3}\sqrt{3+h}}\right)$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{3-(3+h)}{h\sqrt{3}\sqrt{3+h}(\sqrt{3}+\sqrt{3+h})}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{-1}{\sqrt{3}\sqrt{3+h}(\sqrt{3}+\sqrt{3+h})}$

$=-\dfrac{1}{6\sqrt{3}}$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題249]

次の関数 $f(x)$ について，与えられた x の値で微分可能であるかどうかを調べよ。

(1) $f(x)=|(x-1)^3|$ $(x=1)$　　(2) $f(x)=x[x]$ $(x=0)$

解答 (1) 微分可能である　(2) 微分可能でない

解説

(1) $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{|h^3|}{h}$ であるから

$\lim\limits_{h\to+0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to+0}\dfrac{h^3}{h}=\lim\limits_{h\to+0}h^2=0$

$\lim\limits_{h\to-0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to-0}\dfrac{-h^3}{h}=\lim\limits_{h\to-0}(-h^2)=0$

よって　$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$

したがって，$f(x)$ は $x=1$ で微分可能である。

(2) $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{h[h]}{h}=[h]$ であるから　$\lim\limits_{h\to+0}[h]=0$，$\lim\limits_{h\to-0}[h]=-1$

よって，$h\longrightarrow0$ のときの $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ の極限はない。

したがって，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない。

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題250]

次の関数の導関数を，定義に従って求めよ。

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$　(2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$　(3) $f(x)=\sqrt{2x+1}$

解答 (1) $-\dfrac{1}{(x-2)^2}$　(2) $-\dfrac{2}{x^3}$　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

解説

(1) $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}\left\{\dfrac{1}{(x+h)-2}-\dfrac{1}{x-2}\right\}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}\left[\dfrac{(x-2)-\{(x+h)-2\}}{\{(x+h)-2\}(x-2)}\right]$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{-1}{\{(x+h)-2\}(x-2)}=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$

(2) $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}\left\{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}\right\}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}\left\{\dfrac{x^2-(x+h)^2}{x^2(x+h)^2}\right\}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}\left\{\dfrac{-2hx-h^2}{x^2(x+h)^2}\right\}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{-2x-h}{x^2(x+h)^2}=-\dfrac{2}{x^3}$

(3) $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{2(x+h)+1}-\sqrt{2x+1}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\{2(x+h)+1\}-(2x+1)}{h\{\sqrt{2(x+h)+1}+\sqrt{2x+1}\}}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{2}{\sqrt{2(x+h)+1}+\sqrt{2x+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題251]

次の関数を微分せよ。

(1) $y=-x^4+5x^2+4$　(2) $y=2x^7-6x^2+x$

(3) $y=(x^2+1)(2x^2-3)$　(4) $y=(3x^2+2)(x^2-4x+5)$

(5) $y=(x^2+x)(x^3-2)$　(6) $y=(x-1)(x^4+5x^2+3x+2)$

解答 (1) $-4x^3+10x$　(2) $14x^6-12x+1$　(3) $8x^3-2x$

(4) $12x^3-36x^2+34x-8$　(5) $5x^4+4x^3-4x-2$

(6) $5x^4-4x^3+15x^2-4x-1$

解説

(1) $y'=-4x^3+5\cdot2x=-4x^3+10x$

(2) $y'=2\cdot7x^6-6\cdot2x+1=14x^6-12x+1$

(3) $y'=2x(2x^2-3)+(x^2+1)\cdot4x=4x^3-6x+4x^3+4x=8x^3-2x$

(4) $y'=6x(x^2-4x+5)+(3x^2+2)(2x-4)=6x^3-24x^2+30x+6x^3-12x^2+4x-8$

$=12x^3-36x^2+34x-8$

(5) $y'=(2x+1)(x^3-2)+(x^2+x)\cdot3x^2=2x^4-4x+x^3-2+3x^4+3x^3$

$=5x^4+4x^3-4x-2$

(6) $y'=1\cdot(x^4+5x^2+3x+2)+(x-1)(4x^3+10x+3)$

$=x^4+5x^2+3x+2+4x^4-4x^3+10x^2-7x-3$

$=5x^4-4x^3+15x^2-4x-1$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題252]

次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{x+1}$　(2) $y=\dfrac{2x}{x+3}$　(3) $y=\dfrac{1}{x^3-5}$

(4) $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$　(5) $y=\dfrac{x}{x^2-x+1}$　(6) $y=\dfrac{x^3-4x+1}{x-2}$

解答 (1) $-\dfrac{1}{(x+1)^2}$　(2) $\dfrac{6}{(x+3)^2}$　(3) $-\dfrac{3x^2}{(x^3-5)^2}$　(4) $-\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$

(5) $-\dfrac{x^2-1}{(x^2-x+1)^2}$　(6) $\dfrac{2x^3-6x^2+7}{(x-2)^2}$

解説

(1) $y'=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

(2) $y'=\dfrac{2\cdot(x+3)-2x\cdot1}{(x+3)^2}=\dfrac{6}{(x+3)^2}$

(3) $y'=-\dfrac{3x^2}{(x^3-5)^2}$

(4) $y'=\dfrac{1\cdot(x^2+1)-(x-1)\cdot2x}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$

(5) $y'=\dfrac{1\cdot(x^2-x+1)-x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}=-\dfrac{x^2-1}{(x^2-x+1)^2}$

(6) $y'=\dfrac{(3x^2-4)(x-2)-(x^3-4x+1)\cdot1}{(x-2)^2}=\dfrac{2x^3-6x^2+7}{(x-2)^2}$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題253]

次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{x^4}$　(2) $y=-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x^2}$　(3) $y=\dfrac{x^3+x+1}{x^2}$

解答 (1) $-\dfrac{4}{x^5}$　(2) $\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{6}{x^3}$　(3) $1-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}$

解説

(1) $y'=(x^{-4})'=-4x^{-5}=-\dfrac{4}{x^5}$

(2) $y'=(-x^{-3})'+(3x^{-2})'=3x^{-4}-6x^{-3}=\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{6}{x^3}$

(3) $y=x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ より

$y'=(x)'+(x^{-1})'+(x^{-2})'=1-x^{-2}-2x^{-3}=1-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題254]

次の関数を微分せよ。

(1) $y=(x-1)^2$ (2) $y=(3x-1)^3$ (3) $y=(2x-1)(x-2)^2$

(4) $y=(x^2+2x+3)^2$ (5) $y=\dfrac{1}{(2x+3)^2}$ (6) $y=\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^3$

解答 (1) $2(x-1)$ (2) $9(3x-1)^2$ (3) $6(x-2)(x-1)$ (4) $4(x+1)(x^2+2x+3)$

(5) $-\dfrac{4}{(2x+3)^3}$ (6) $-\dfrac{3x^2}{(x-1)^4}$

解説

(1) $y'=2(x-1)\cdot(x-1)'=2(x-1)$

(2) $y'=3(3x-1)^2\cdot(3x-1)'=3(3x-1)^2\cdot 3=9(3x-1)^2$

(3) $y'=2(x-2)^2+(2x-1)\cdot 2(x-2)\cdot(x-2)'=2(x-2)^2+(2x-1)\cdot 2(x-2)$
$=2(x-2)(3x-3)=6(x-2)(x-1)$

(4) $y'=2(x^2+2x+3)(x^2+2x+3)'=2(x^2+2x+3)(2x+2)=4(x+1)(x^2+2x+3)$

(5) $y'=\{(2x+3)^{-2}\}'=-2(2x+3)^{-3}\cdot(2x+3)'$
$=-\dfrac{2}{(2x+3)^3}\cdot 2=-\dfrac{4}{(2x+3)^3}$

(6) $y'=3\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2\left(\dfrac{x}{x-1}\right)'=3\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2\dfrac{1\cdot(x-1)-x\cdot 1}{(x-1)^2}$
$=3\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2\cdot\dfrac{-1}{(x-1)^2}=-\dfrac{3x^2}{(x-1)^4}$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題255]

逆関数の微分法の公式を用いて，関数 $y=\sqrt[10]{x}$ を微分せよ。

解答 $\dfrac{1}{10\sqrt[10]{x^9}}$

解説

$y=\sqrt[10]{x}$ を x について解くと，$x=y^{10}$ であるから

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{10y^9}=\frac{1}{10(\sqrt[10]{x})^9}=\frac{1}{10\sqrt[10]{x^9}}$$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題256]

次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sqrt[8]{x}$ (2) $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ (3) $y=x^2\sqrt{x}$

(4) $y=\sqrt[3]{x^2+2x+3}$ (5) $y=\sqrt[4]{(1-2x)^3}$ (6) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}$

解答 (1) $\dfrac{1}{8\sqrt[8]{x^7}}$ (2) $-\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x^7}}$ (3) $\dfrac{5}{2}x\sqrt{x}$ (4) $\dfrac{2x+2}{3\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2}}$

(5) $-\dfrac{3}{2\sqrt[4]{1-2x}}$ (6) $-\dfrac{x}{\sqrt{(x^2+3)^3}}$

解説

(1) $y'=\left(x^{\frac{1}{8}}\right)'=\dfrac{1}{8}x^{-\frac{7}{8}}=\dfrac{1}{8\sqrt[8]{x^7}}$

(2) $y'=\left(x^{-\frac{3}{4}}\right)'=-\dfrac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}=-\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x^7}}$

(3) $y'=\left(x^{\frac{5}{2}}\right)'=\dfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}=\dfrac{5}{2}x\sqrt{x}$

(4) $y'=\left\{(x^2+2x+3)^{\frac{1}{3}}\right\}'=\dfrac{1}{3}(x^2+2x+3)^{-\frac{2}{3}}\cdot(x^2+2x+3)'=\dfrac{2x+2}{3\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2}}$

(5) $y'=\left\{(1-2x)^{\frac{3}{4}}\right\}'=\dfrac{3}{4}(1-2x)^{-\frac{1}{4}}\cdot(1-2x)'=\dfrac{3\cdot(-2)}{4\sqrt[4]{1-2x}}=-\dfrac{3}{2\sqrt[4]{1-2x}}$

(6) $y'=\left\{(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}\right\}'=-\dfrac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{3}{2}}\cdot(x^2+3)'=-\dfrac{2x}{2\sqrt{(x^2+3)^3}}=-\dfrac{x}{\sqrt{(x^2+3)^3}}$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題257]

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，次の極限値を $f'(a)$ で表せ。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a-4h)-f(a)}{h}$ (2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a+2h)}{h}$

解答 (1) $-4f'(a)$ (2) $f'(a)$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a-4h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\left\{-4\cdot\frac{f(a-4h)-f(a)}{-4h}\right\}=-4f'(a)$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a+2h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)-\{f(a+2h)-f(a)\}}{h}$
$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\left\{3\cdot\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}-2\cdot\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\right\}$
$=3f'(a)-2f'(a)=f'(a)$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題258]

次の関数 $f(x)$ について，$x=0$ で連続であるが，微分可能でないことを示せ。

$x\neq 0$ のとき $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$，$f(0)=0$

解答 略

解説

$0\leqq\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqq 1$ より $0\leqq\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqq|x|$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}|x|=0$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$ より，$f(x)$ は $x=0$ で連続である。

また $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\sin\dfrac{1}{h}$

$h\longrightarrow 0$ のとき，$\sin\dfrac{1}{h}$ は一定の値に近づかないから，$\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ の極限はない。

したがって，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない。

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題259]

次の関数を微分せよ。

(1) $y=(x+2)(x-1)(x-5)$ (2) $y=(x^2-1)(x+2)(2x-1)$

解答 (1) $3x^2-8x-7$ (2) $8x^3+9x^2-8x-3$

解説

(1) $y'=1\cdot(x-1)(x-5)+(x+2)\cdot 1\cdot(x-5)+(x+2)(x-1)\cdot 1$
$=x^2-6x+5+x^2-3x-10+x^2+x-2=3x^2-8x-7$

(2) $y'=2x(x+2)(2x-1)+(x^2-1)\cdot 1\cdot(2x-1)+(x^2-1)(x+2)\cdot 2$
$=4x^3+6x^2-4x+2x^3-x^2-2x+1+2x^3+4x^2-2x-4$
$=8x^3+9x^2-8x-3$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題260]

次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{x}{(1+x^3)^2}$　(2) $y=\dfrac{1}{x\sqrt[4]{x}}$　(3) $y=x\sqrt{x^2+2}$

(4) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$　(5) $y=\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$　(6) $y=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$

解答 (1) $\dfrac{1-5x^3}{(1+x^3)^3}$　(2) $-\dfrac{5}{4x^2\sqrt[4]{x}}$　(3) $\dfrac{2(x^2+1)}{\sqrt{x^2+2}}$　(4) $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

(5) $-\dfrac{1}{4x\sqrt{x+\sqrt{x}}}$　(6) $-\dfrac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}$

解説

(1) $y'=\dfrac{1\cdot(1+x^3)^2-x\cdot2(1+x^3)\cdot3x^2}{(1+x^3)^4}=\dfrac{1+x^3-6x^3}{(1+x^3)^3}=\dfrac{1-5x^3}{(1+x^3)^3}$

(2) $y'=\left(x^{-\frac{5}{4}}\right)'=-\dfrac{5}{4}x^{-\frac{9}{4}}=-\dfrac{5}{4x^2\sqrt[4]{x}}$

(3) $y'=1\cdot\sqrt{x^2+2}+x\left(\sqrt{x^2+2}\right)'=\sqrt{x^2+2}+x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}$

$=\dfrac{(x^2+2)+x^2}{\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{2(x^2+1)}{\sqrt{x^2+2}}$

(4) $y'=\dfrac{1\cdot\sqrt{1-x^2}-x\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{1-x^2}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$

$=\dfrac{(1-x^2)+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

(5) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}}\cdot\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}}\cdot\left(-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}\right)=-\dfrac{1}{4x\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

(6) $y'=-\dfrac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{(x+\sqrt{1+x^2})^2}=-\dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(x+\sqrt{1+x^2})^2}$

$=-\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{(x+\sqrt{1+x^2})^2\sqrt{1+x^2}}=-\dfrac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題261]

$f(x)=x^3+x$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の $x=0$ における微分係数を求めよ。

解答 1

解説

$y=f^{-1}(x)$ とすると　$x=f(y)=y^3+y$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{3y^2+1}$

$x=0$ のとき　$y^3+y=0$

すなわち　$y(y^2+1)=0$

したがって　$y=0$

このとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{3\cdot0^2+1}=1$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題262]

次の関数を微分せよ。

(1) $y=2x-\cos x$　(2) $y=\sin x-\tan x$　(3) $y=\cos(2x-1)$

(4) $y=\tan 3x$　(5) $y=\sin x^2$　(6) $y=\tan x^2$

(7) $y=2x\sin x$　(8) $y=\cos^3 x$　(9) $y=\dfrac{1}{\cos x}$

(10) $y=\sin^2 2x$　(11) $y=\sin x\cos x$　(12) $y=\sin 3x\cos 5x$

解答 (1) $2+\sin x$　(2) $\cos x-\dfrac{1}{\cos^2 x}$　(3) $-2\sin(2x-1)$　(4) $\dfrac{3}{\cos^2 3x}$

(5) $2x\cos x^2$　(6) $\dfrac{2x}{\cos^2 x^2}$　(7) $2\sin x+2x\cos x$　(8) $-3\cos^2 x\sin x$

(9) $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$　(10) $2\sin 4x$　(11) $\cos 2x$

(12) $3\cos 3x\cos 5x-5\sin 3x\sin 5x$

解説

(1) $y'=2+\sin x$

(2) $y'=\cos x-\dfrac{1}{\cos^2 x}$

(3) $y'=-\sin(2x-1)\cdot(2x-1)'=-2\sin(2x-1)$

(4) $y'=\dfrac{1}{\cos^2 3x}\cdot(3x)'=\dfrac{3}{\cos^2 3x}$

(5) $y'=\cos x^2\cdot(x^2)'=2x\cos x^2$

(6) $y'=\dfrac{1}{\cos^2 x^2}\cdot(x^2)'=\dfrac{2x}{\cos^2 x^2}$

(7) $y'=2\sin x+2x\cos x$

(8) $y'=3\cos^2 x\cdot(\cos x)'=3\cos^2 x\cdot(-\sin x)=-3\cos^2 x\sin x$

(9) $y'=-\dfrac{(\cos x)'}{\cos^2 x}=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

(10) $y'=2\sin 2x\cdot(\sin 2x)'=2\sin 2x\cdot2\cos 2x=2\sin 4x$

(11) $y'=\cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot(-\sin x)=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$

別解　$y=\dfrac{1}{2}\sin 2x$ より　$y'=\dfrac{1}{2}\cos 2x\cdot(2x)'=\cos 2x$

(12) $y'=\cos 3x\cdot(3x)'\cdot\cos 5x+\sin 3x\cdot(-\sin 5x)\cdot(5x)'$

$=3\cos 3x\cos 5x-5\sin 3x\sin 5x$

別解　和と積の公式から　$y=\dfrac{1}{2}(\sin 8x-\sin 2x)$

よって　$y'=\dfrac{1}{2}\{(\cos 8x)\cdot8-(\cos 2x)\cdot2\}=4\cos 8x-\cos 2x$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題263]

次の関数を微分せよ。ただし，$a>0$，$a\neq1$ とする。

(1) $y=\log 4x$　(2) $y=\log_2(3x-2)$　(3) $y=\log(x^2+2)$

(4) $y=2x\log_3 x$　(5) $y=(\log x)^3$　(6) $y=\log_a|x^2-5|$

解答 (1) $\dfrac{1}{x}$　(2) $\dfrac{3}{(3x-2)\log 2}$　(3) $\dfrac{2x}{x^2+2}$　(4) $2\log_3 x+\dfrac{2}{\log 3}$

(5) $\dfrac{3(\log x)^2}{x}$　(6) $\dfrac{2x}{(x^2-5)\log a}$

解説

(1) $y'=\dfrac{1}{4x}\cdot(4x)'=\dfrac{4}{4x}=\dfrac{1}{x}$

(2) $y'=\dfrac{1}{(3x-2)\log 2}\cdot(3x-2)'=\dfrac{3}{(3x-2)\log 2}$

(3) $y'=\dfrac{1}{x^2+2}\cdot(x^2+2)'=\dfrac{2x}{x^2+2}$

(4) $y'=2\log_3 x+2x\cdot\dfrac{1}{x\log 3}=2\log_3 x+\dfrac{2}{\log 3}$

(5) $y'=3(\log x)^2\cdot(\log x)'=3(\log x)^2\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{3(\log x)^2}{x}$

(6) $y'=\dfrac{1}{(x^2-5)\log a}\cdot(x^2-5)'=\dfrac{2x}{(x^2-5)\log a}$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題264]

次の関数を微分せよ。ただし，$a>0$，$a\neq 1$ とする。

(1) $y=e^{2x+1}$ (2) $y=4^x$ (3) $y=xe^{-3x}$

(4) $y=e^x\cos x$ (5) $y=(x+1)3^x$ (6) $y=a^{-3x}$

解答 (1) $2e^{2x+1}$ (2) $4^x\log 4$ (3) $(1-3x)e^{-3x}$ (4) $e^x(\cos x-\sin x)$

(5) $3^x\{(x+1)\log 3+1\}$ (6) $-3a^{-3x}\log a$

解説

(1) $y'=e^{2x+1}\cdot(2x+1)'=e^{2x+1}\cdot 2=2e^{2x+1}$

(2) $y'=4^x\log 4$

(3) $y'=1\cdot e^{-3x}+xe^{-3x}\cdot(-3x)'=e^{-3x}-3xe^{-3x}=(1-3x)e^{-3x}$

(4) $y'=e^x\cos x+e^x(-\sin x)=e^x(\cos x-\sin x)$

(5) $y'=1\cdot 3^x+(x+1)\cdot 3^x\log 3=3^x\{(x+1)\log 3+1\}$

(6) $y'=a^{-3x}\cdot\log a\cdot(-3x)'=a^{-3x}\cdot\log a\cdot(-3)=-3a^{-3x}\log a$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題265]

次の関数を微分せよ。

(1) $y=\cos(\sin x)$ (2) $y=\sin^5 x\cos 5x$ (3) $y=e^{-2x}\sin 2x$

(4) $y=\log\left|\dfrac{2x-1}{2x+1}\right|$ (5) $y=\sin\sqrt{x^2+x+1}$ (6) $y=\sqrt{1+\sin^2 x}$

(7) $y=\dfrac{1}{\cos x+e^{-x}}$ (8) $y=\log\dfrac{|x|}{1+\cos x}$

解答 (1) $-\sin(\sin x)\cdot\cos x$ (2) $5\sin^4 x\cos 6x$ (3) $2e^{-2x}(\cos 2x-\sin 2x)$

(4) $\dfrac{4}{4x^2-1}$ (5) $\dfrac{(2x+1)\cos\sqrt{x^2+x+1}}{2\sqrt{x^2+x+1}}$ (6) $\dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}$

(7) $\dfrac{\sin x+e^{-x}}{(\cos x+e^{-x})^2}$ (8) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

解説

(1) $y'=-\sin(\sin x)\cdot(\sin x)'=-\sin(\sin x)\cdot\cos x$

(2) $y'=5\sin^4 x\cdot(\sin x)'\cdot\cos 5x+\sin^5 x\cdot(-\sin 5x)\cdot(5x)'$

$=5\sin^4 x(\cos x)\cos 5x+\sin^5 x(-\sin 5x)\cdot 5$

$=5\sin^4 x(\cos x\cos 5x-\sin x\sin 5x)$

$=5\sin^4 x\cos 6x$

(3) $y'=e^{-2x}(-2x)'\sin 2x+e^{-2x}(\cos 2x)\cdot(2x)'$

$=e^{-2x}(-2)\sin 2x+e^{-2x}(\cos 2x)\cdot 2$

$=2e^{-2x}(\cos 2x-\sin 2x)$

(4) $\log\left|\dfrac{2x-1}{2x+1}\right|=\log|2x-1|-\log|2x+1|$ より

$$y'=\frac{2}{2x-1}-\frac{2}{2x+1}=\frac{2(2x+1)-2(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{4}{4x^2-1}$$

(5) $y'=\cos\sqrt{x^2+x+1}\cdot(\sqrt{x^2+x+1})'=\dfrac{(2x+1)\cos\sqrt{x^2+x+1}}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

(6) $y'=\dfrac{2\sin x\cos x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}=\dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}$

(7) $y'=-\dfrac{(\cos x+e^{-x})'}{(\cos x+e^{-x})^2}=-\dfrac{-\sin x-e^{-x}}{(\cos x+e^{-x})^2}=\dfrac{\sin x+e^{-x}}{(\cos x+e^{-x})^2}$

(8) $y=\log|x|-\log(1+\cos x)$ より

$$y'=\frac{1}{x}-\frac{-\sin x}{1+\cos x}=\frac{1}{x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題266]

$\log|y|$ の導関数を利用して，次の関数を微分せよ。ただし，a は定数とする。

(1) $y=\dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$ (2) $y=\dfrac{(1+x)^3(1-2x)}{(1-x)(1+2x)^3}$

(3) $y=\sqrt[3]{(x-2)(x^2-2)}$ (4) $y=\dfrac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$

解答 (1) $-\dfrac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}$ (2) $-\dfrac{2(1+x)^2(4x^2-3x+2)}{(1-x)^2(1+2x)^4}$

(3) $\dfrac{3x^2-4x-2}{3\sqrt[3]{(x-2)^2(x^2-2)^2}}$ (4) $\dfrac{a^2-2x^2}{\sqrt{(a^2+x^2)^5}}$

解説

(1) 両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log|y|=2\log|x+1|-3\log|x+2|-4\log|x+3|$$

両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x+2}-\frac{4}{x+3}=-\frac{5x^2+14x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

よって

$$y'=-\frac{5x^2+14x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)}\cdot\frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}=-\frac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}$$

(2) 両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log|y|=3\log|1+x|+\log|1-2x|-\log|1-x|-3\log|1+2x|$$

両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=\frac{3}{1+x}-\frac{2}{1-2x}+\frac{1}{1-x}-\frac{6}{1+2x}=-\frac{2(4x^2-3x+2)}{(1+x)(1-2x)(1-x)(1+2x)}$$

よって $y'=-\dfrac{2(4x^2-3x+2)}{(1+x)(1-2x)(1-x)(1+2x)}\cdot\dfrac{(1+x)^3(1-2x)}{(1-x)(1+2x)^3}$

$$=-\frac{2(1+x)^2(4x^2-3x+2)}{(1-x)^2(1+2x)^4}$$

(3) 両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log|y|=\frac{1}{3}(\log|x-2|+\log|x^2-2|)$$

両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2}+\frac{2x}{x^2-2}\right)=\frac{3x^2-4x-2}{3(x-2)(x^2-2)}$$

よって $y'=\dfrac{3x^2-4x-2}{3(x-2)(x^2-2)}\cdot\sqrt[3]{(x-2)(x^2-2)}=\dfrac{3x^2-4x-2}{3\sqrt[3]{(x-2)^2(x^2-2)^2}}$

(4) 両辺の絶対値の自然対数をとると $\log|y|=\log|x|-\dfrac{3}{2}\log|a^2+x^2|$

両辺の関数を x で微分すると $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2x}{a^2+x^2}=\dfrac{a^2-2x^2}{x(a^2+x^2)}$

よって $y'=\dfrac{a^2-2x^2}{x(a^2+x^2)}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}=\dfrac{a^2-2x^2}{\sqrt{(a^2+x^2)^5}}$

［改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題267］

次の関数を微分せよ。

(1) $y=x^{\sin x}$ $(x>0)$　(2) $y=x^{e^x}$ $(x>0)$

(3) $y=x^{\log x}$ $(x>0)$　(4) $y=(\log x)^x$ $(x>1)$

解答 (1) $x^{\sin x}\left(\cos x\log x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$　(2) $x^{e^x}e^x\left(\log x+\dfrac{1}{x}\right)$　(3) $2x^{\log x-1}\log x$

(4) $(\log x)^x\left\{\log(\log x)+\dfrac{1}{\log x}\right\}$

解説

(1) $x>0$ であるから　$x^{\sin x}>0$

両辺の自然対数をとると　$\log y=\sin x\log x$

両辺の関数を x で微分すると　$\dfrac{y'}{y}=\cos x\log x+\dfrac{\sin x}{x}$

よって　$y'=x^{\sin x}\left(\cos x\log x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$

(2) $x>0$ であるから　$x^{e^x}>0$

両辺の自然対数をとると　$\log y=e^x\log x$

両辺の関数を x で微分すると　$\dfrac{y'}{y}=e^x\log x+\dfrac{e^x}{x}$

よって　$y'=x^{e^x}e^x\left(\log x+\dfrac{1}{x}\right)$

(3) $x>0$ であるから　$x^{\log x}>0$

両辺の自然対数をとると　$\log y=(\log x)^2$

両辺の関数を x で微分すると　$\dfrac{y'}{y}=2(\log x)\cdot\dfrac{1}{x}$

よって　$y'=x^{\log x}\cdot 2(\log x)\cdot\dfrac{1}{x}=2x^{\log x-1}\log x$

(4) $x>1$ であるから　$(\log x)^x>0$

両辺の自然対数をとると　$\log y=x\log(\log x)$

両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=\log(\log x)+x\cdot\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}=\log(\log x)+\frac{1}{\log x}$$

よって　$y'=(\log x)^x\left\{\log(\log x)+\dfrac{1}{\log x}\right\}$

［改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題268］

次の極限を求めよ。ただし，a は定数とする。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\log x}{x-1}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{\sin(x-a)}$

解答 (1) 1　(2) $\cos a$

解説

(1) $f(x)=\log x$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\log x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\log x-0}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{1}{1}=1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{\sin(x-a)}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\cdot\frac{x-a}{\sin(x-a)}\right\}$

ここで，$f(x)=\sin x$ とおくと，$f'(x)=\cos x$ であるから

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=\cos a$$

また，$x-a=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow a$ のとき $\theta\longrightarrow 0$ であるから

$$\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\sin(x-a)}=\lim_{\theta\to0}\frac{\theta}{\sin\theta}=1$$

したがって　$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{\sin(x-a)}=\cos a\cdot1=\cos a$

［改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題269］

$\displaystyle\lim_{k\to0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=e$ であることを用いて，次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^x$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

解答 (1) e^3　(2) $\dfrac{1}{e}$　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$　(4) $\dfrac{1}{e}$

解説

(1) $3x=t$ とおくと　$x\longrightarrow0$ のとき $t\longrightarrow0$

$$\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{3}{t}}=\lim_{t\to0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^3=e^3$$

(2) $-x=t$ とおくと　$x\longrightarrow0$ のとき $t\longrightarrow0$

$$\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}=\lim_{t\to0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

(3) $-\dfrac{1}{2x}=t$ とおくと　$x\longrightarrow\infty$ のとき $t\longrightarrow-0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^x=\lim_{t\to-0}(1+t)^{-\frac{1}{2t}}=\lim_{t\to-0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{-\frac{1}{2}}$

$$=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

(4) $\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$

$\dfrac{1}{x}=t$ とおくと　$x\longrightarrow\infty$ のとき $t\longrightarrow+0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\lim_{t\to+0}\frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{e}$

［改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題270］

次の関数の，与えられた n の値に対する第 n 次導関数を求めよ。

(1) $y=x^4-3x^2+2$ $(n=2)$　(2) $y=\dfrac{1}{x+2}$ $(n=2)$

(3) $y=(2x-1)^4$ $(n=3)$　(4) $y=e^{-x}$ $(n=4)$

解答 (1) $12x^2-6$　(2) $\dfrac{2}{(x+2)^3}$　(3) $192(2x-1)$　(4) e^{-x}

解説

(1) $y'=4x^3-6x$ より　$y''=12x^2-6$

(2) $y'=-\dfrac{1}{(x+2)^2}$ より　$y''=\dfrac{2}{(x+2)^3}$

(3) $y'=8(2x-1)^3$，$y''=48(2x-1)^2$ より　$y'''=192(2x-1)$

(4) $y'=-e^{-x}$，$y''=e^{-x}$，$y'''=-e^{-x}$ より　$y^{(4)}=e^{-x}$

［改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題271］

次の方程式で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $y^2=8x$　(2) $x^2+y^2=5$　(3) $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$　(4) $2xy-3=0$

解答 (1) $\dfrac{4}{y}$　(2) $-\dfrac{x}{y}$　(3) $\dfrac{x}{4y}$　(4) $-\dfrac{y}{x}$

解説

(1) 両辺を x で微分すると　$2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=8$

よって，$y\neq0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4}{y}$

(2) 両辺を x で微分すると　$2x+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

よって，$y\neq0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$

(3) 両辺を x で微分すると　$\dfrac{x}{2}-2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

よって，$y\neq0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{4y}$

(4) 両辺を x で微分すると　$2y+2x\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

よって，$x\neq0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題272]

x の関数 y が，t を媒介変数として，次の式で表されるとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

(1) $x=t+1$，$y=2t-1$　(2) $x=2t^2-t+1$，$y=t^3-2t-1$

(3) $x=\sin t$，$y=\sin 2t$　(4) $x=2(t-\sin t)$，$y=2(1-\cos t)$

解答　(1) 2　(2) $\dfrac{3t^2-2}{4t-1}$　(3) $\dfrac{2\cos 2t}{\cos t}$　(4) $\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$

解説

(1) $\dfrac{dx}{dt}=1$，$\dfrac{dy}{dt}=2$ より　$\dfrac{dy}{dx}=2$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=4t-1$，$\dfrac{dy}{dt}=3t^2-2$ より　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3t^2-2}{4t-1}$

(3) $\dfrac{dx}{dt}=\cos t$，$\dfrac{dy}{dt}=\cos 2t\cdot 2=2\cos 2t$ より　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\cos 2t}{\cos t}$

(4) $\dfrac{dx}{dt}=2(1-\cos t)$，$\dfrac{dy}{dt}=2\sin t$ より　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題273]

次の関数の第 3 次導関数を求めよ。

(1) $y=\sqrt{2x+1}$　(2) $y=\cos^3 x$　(3) $y=e^{-x}\log x$

解答　(1) $\dfrac{3}{\sqrt{(2x+1)^5}}$　(2) $21\sin x-27\sin^3 x$　(3) $e^{-x}\left(\dfrac{3x^2+3x+2}{x^3}-\log x\right)$

解説

(1) $y'=\dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$y''=-\dfrac{2}{2\sqrt{(2x+1)^3}}=-\dfrac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}$

よって　$y'''=\dfrac{3\cdot 2}{2\sqrt{(2x+1)^5}}=\dfrac{3}{\sqrt{(2x+1)^5}}$

(2) $y'=-3\cos^2 x\sin x$

$y''=-3(-2\cos x\sin^2 x+\cos^3 x)=-3\{-2\cos x(1-\cos^2 x)+\cos^3 x\}$

$=6\cos x-9\cos^3 x$

よって

$y'''=-6\sin x+27\sin x\cos^2 x=-6\sin x+27\sin x(1-\sin^2 x)$

$=21\sin x-27\sin^3 x$

(3) $y'=-e^{-x}\log x+e^{-x}\cdot\dfrac{1}{x}=e^{-x}\left(\dfrac{1}{x}-\log x\right)$

$y''=-e^{-x}\left(\dfrac{1}{x}-\log x\right)+e^{-x}\left(-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)=-e^{-x}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}-\log x\right)$

よって

$y'''=e^{-x}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}-\log x\right)-e^{-x}\left(-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)=e^{-x}\left(\dfrac{3x^2+3x+2}{x^3}-\log x\right)$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題274]

関数 $y=e^x\sin x$ について，次の等式が成り立つことを示せ。

$y''-2y'+2y=0$

解答　略

解説

$y=e^x\sin x$ より

$y'=e^x\sin x+e^x\cos x$

$y''=(e^x\sin x+e^x\cos x)+(e^x\cos x-e^x\sin x)=2e^x\cos x$

よって

$y''-2y'+2y=2e^x\cos x-2(e^x\sin x+e^x\cos x)+2e^x\sin x$

$=2e^x\cos x-2e^x\sin x-2e^x\cos x+2e^x\sin x$

$=0$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題275]

2 次関数 $f(x)$ が次の等式を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

$f''(x)+2f'(x)=8x$，$f(0)=1$

解答　$f(x)=2x^2-2x+1$

解説

$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ とおくと　$f'(x)=2ax+b$，$f''(x)=2a$

よって，$f''(x)+2f'(x)=8x$ より　$2a+2(2ax+b)=8x$

すなわち　$4ax+(2a+2b)=8x$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して　$4a=8$，$2a+2b=0$

これを解くと　$a=2$，$b=-2$　これは，$a\neq 0$ を満たす。

また，$f(0)=1$ より　$c=1$

したがって　$f(x)=2x^2-2x+1$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題276]

関数 $f(x)=\log x$ について，次のことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$

解答　略

解説

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$　…… ① とする。

[1] $n=1$ のとき

左辺$=f'(x)=\dfrac{1}{x}$

右辺$=(-1)^{1-1}\dfrac{(1-1)!}{x^1}=\dfrac{1}{x}$

よって，$n=1$ のとき，① が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{x^k}$

が成り立つと仮定する。

このとき

$f^{(k+1)}(x)=\dfrac{d}{dx}\left\{(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{x^k}\right\}=(-1)^{k-1}(k-1)!\left(-\dfrac{k}{x^{k+1}}\right)=(-1)^k\dfrac{k!}{x^{k+1}}$

よって，$n=k+1$ のときも ① が成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題277]

次の方程式で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $(y+1)^2=x^2+x$　(2) $x^2+3xy-y^2=1$

(3) $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=1$　(4) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

解答　(1) $\dfrac{2x+1}{2(y+1)}$　(2) $-\dfrac{2x+3y}{3x-2y}$　(3) $-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$　(4) $-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

解説

(1) 両辺を x で微分すると　$2(y+1)\cdot\dfrac{dy}{dx}=2x+1$

よって，$y\neq -1$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+1}{2(y+1)}$

(2) 両辺を x で微分すると　$2x+3y+3x\cdot\dfrac{dy}{dx}-2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

よって，$3x-2y\neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+3y}{3x-2y}$

(3) 両辺を x で微分すると　$\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

よって，$x\neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$

(4) 両辺を x で微分すると　$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

よって，$x\neq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題278]

x の関数 y が，t を媒介変数として，次の式で表されるとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

(1) $x=\sqrt{1-t^2}$，$y=t^2+1$　　(2) $x=\sin t$，$y=\cos 2t+1$

(3) $x=\cos^3 t$，$y=2\sin^3 t$　　(4) $x=\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$，$y=\dfrac{2t}{1-t^2}$

解答　(1) $-2\sqrt{1-t^2}$　(2) $-4\sin t$　(3) $-2\tan t$　(4) $\dfrac{t^2+1}{2t}$

解説

(1) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}=-\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$

$\dfrac{dy}{dt}=2t$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2t}{-\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}}=-2\sqrt{1-t^2}$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=\cos t$，$\dfrac{dy}{dt}=-2\sin 2t=-4\sin t\cos t$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-4\sin t\cos t}{\cos t}=-4\sin t$

(3) $\dfrac{dx}{dt}=-3\cos^2 t\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=6\sin^2 t\cos t$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{6\sin^2 t\cos t}{-3\cos^2 t\sin t}=-\dfrac{2\sin t}{\cos t}=-2\tan t$

(4) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t(1-t^2)-(1+t^2)\cdot(-2t)}{(1-t^2)^2}=\dfrac{4t}{(1-t^2)^2}$

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2(1-t^2)-2t\cdot(-2t)}{(1-t^2)^2}=\dfrac{2t^2+2}{(1-t^2)^2}$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2t^2+2}{4t}=\dfrac{t^2+1}{2t}$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題279]

x の関数 y が，t を媒介変数として，$x=\cos t+t\sin t$，$y=\sin t-t\cos t$ と表されるとき，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ。

解答　$\dfrac{dy}{dx}=\tan t$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{t\cos^3 t}$

解説

$\dfrac{dx}{dt}=-\sin t+(\sin t+t\cos t)=t\cos t$

$\dfrac{dy}{dt}=\cos t-(\cos t-t\sin t)=t\sin t$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t\sin t}{t\cos t}=\tan t$

したがって

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}(\tan t)\cdot\frac{1}{\dfrac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{t\cos t}=\frac{1}{t\cos^3 t}$$

参考　一般に，$x=f(t)$，$y=g(t)$ のとき，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{f'(t)g''(t)-f''(t)g'(t)}{\{f'(t)\}^3}$$

が成り立つ。

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 例題30]

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，次の極限値を $f'(a)$ で表せ。

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-3h)}{h}$$

解答　$5f'(a)$

解説

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-3h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)-\{f(a-3h)-f(a)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{2\cdot\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}+3\cdot\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}\right\}$$

$$=2f'(a)+3f'(a)=5f'(a)$$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 例題31]

次の関数を微分せよ。

$y=x^{2x}$　$(x>0)$

解答　$2x^{2x}(\log x+1)$

解説

$x>0$ であるから　$x^{2x}>0$

両辺の自然対数をとると　$\log y=2x\log x$

両辺の関数を x で微分すると　$\dfrac{y'}{y}=2\log x+2x\cdot\dfrac{1}{x}=2(\log x+1)$

よって　$y'=2(\log x+1)\cdot x^{2x}=2x^{2x}(\log x+1)$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 例題32]

$\displaystyle\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=e$ であることを用いて，次の極限を求めよ。ただし，a は1でない正の定数とする。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$

解答　(1) e^2　(2) $\dfrac{1}{\log a}$

解説

(1) $\dfrac{2}{x}=t$ とおくと　$x\longrightarrow\infty$ のとき $t\longrightarrow +0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{t\to +0}(1+t)^{\frac{2}{t}}=\lim_{t\to +0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^2=e^2$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x\log a}=\frac{1}{\log a}\lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{1}{\log a}\cdot\log e=\frac{1}{\log a}$$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 総合演習42]

関数 $f(x)$ は $x=0$ で微分可能で，$f'(0)=2$ とする。このとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(-x)}{x}$ の値を求めよ。

解答　6

解説

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left\{2\cdot\frac{f(2x)-f(0)}{2x}+\frac{f(-x)-f(0)}{-x}\right\}$$

$$=2f'(0)+f'(0)=3f'(0)$$

$$=3\cdot 2=6$$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 総合演習43]

次の関数を微分せよ。

(1) $y=x\log(x+\sqrt{x^2+1})$　　(2) $y=\left(\dfrac{2}{x}\right)^x$　$(x>0)$

解答　(1) $\log(x+\sqrt{x^2+1})+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$　(2) $\left(\dfrac{2}{x}\right)^x\left(\log\dfrac{2}{x}-1\right)$

解説

(1) $$y'=(x)'\log(x+\sqrt{x^2+1})+x\{\log(x+\sqrt{x^2+1})\}'$$

$$=\log(x+\sqrt{x^2+1})+x\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=\log(x+\sqrt{x^2+1})+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

(2) $\dfrac{2}{x}>0$ であるから，$y=\left(\dfrac{2}{x}\right)^x$ の両辺の自然対数をとると

$\log y=x\log\dfrac{2}{x}$　すなわち　$\log y=x(\log 2-\log x)$

両辺の関数を x で微分すると

$\dfrac{y'}{y}=1\cdot(\log 2-\log x)+x\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\log\dfrac{2}{x}-1$

よって　$y'=\left(\dfrac{2}{x}\right)^x\left(\log\dfrac{2}{x}-1\right)$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 総合演習44]

$0<a<1$ のとき，極限 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\log\left(\frac{x-a}{1-a}\right)$ を求めよ。

解答 $\dfrac{1}{1-a}$

解説

$f(x)=\log\left(\dfrac{x-a}{1-a}\right)$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{1-a}{x-a}\cdot\dfrac{1}{1-a}=\dfrac{1}{x-a}$

ここで，$f(1)=\log\left(\dfrac{1-a}{1-a}\right)=0$ であるから

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\log\left(\frac{x-a}{1-a}\right)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{1}{1-a}$$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 総合演習45]

関数 $x=\tan y$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ を x の関数として求めよ。

解答 $\dfrac{1}{1+x^2}$

解説

両辺を x で微分すると　$1=\dfrac{1}{\cos^2 y}\cdot\dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{1}{\cos^2 y}=1+\tan^2 y=1+x^2$ であるから　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2}$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 総合演習46]

a は定数とする。関数 $y=e^{2x}\sin ax$ が $y''-4y'+6y=0$ を満たすとき，a の値を求めよ。

解答 $a=\pm\sqrt{2}$，0

解説

$y=e^{2x}\sin ax$ から

$y'=2e^{2x}\cdot\sin ax+e^{2x}\cdot a\cos ax=e^{2x}(2\sin ax+a\cos ax)$

$y''=2e^{2x}\cdot(2\sin ax+a\cos ax)+e^{2x}\cdot(2a\cos ax-a^2\sin ax)$

$=e^{2x}\{(4-a^2)\sin ax+4a\cos ax\}$

$y''-4y'+6y=0$ を満たすから

$e^{2x}\{(4-a^2)\sin ax+4a\cos ax\}-4e^{2x}(2\sin ax+a\cos ax)+6e^{2x}\sin ax=0$

整理すると　$(2-a^2)e^{2x}\sin ax=0$

これが x についての恒等式であるための条件は　$2-a^2=0$　または　$a=0$

したがって　$a=\pm\sqrt{2}$，0

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 総合演習47]

x の関数 y が，θ を媒介変数として，$x=1-\cos\theta$，$y=\theta-\sin\theta$ と表されるとき，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を θ の関数として表せ。

解答 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin^3\theta}$

解説

$\dfrac{dx}{d\theta}=\sin\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=1-\cos\theta$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

また　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{d\theta}{dx}=\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\cdot\dfrac{1}{\frac{dx}{d\theta}}$

$=\dfrac{\sin\theta\sin\theta-(1-\cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta}\cdot\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin^3\theta}$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 総合演習48]

a を実数とし，関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x)=\begin{cases}a\sin x+\cos x & \left(x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)\\ x-\pi & \left(x>\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

(1) $f(x)$ が $x=\dfrac{\pi}{2}$ で連続となる a の値を求めよ。

(2) (1) で求めた a の値に対し，$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ で微分可能でないことを示せ。

解答 (1) $a=-\dfrac{\pi}{2}$　(2) 略

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(a\sin x+\cos x)=a$

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}(x-\pi)=-\frac{\pi}{2}$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a\sin\dfrac{\pi}{2}+\cos\dfrac{\pi}{2}=a$

よって，$f(x)$ が $x=\dfrac{\pi}{2}$ で連続となる a の値は　$a=-\dfrac{\pi}{2}$

(2) $h>0$ のとき

$f\left(\dfrac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\left(\dfrac{\pi}{2}+h\right)-\pi-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=h$

であるから

$$\lim_{h\to+0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h}{h}=1$$

$h<0$ のとき

$f\left(\dfrac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+h\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+h\right)-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$=-\dfrac{\pi}{2}(\cos h-1)-\sin h$

であるから

$$\lim_{h\to-0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}=\frac{\pi}{2}\lim_{h\to-0}\frac{1-\cos h}{h}-\lim_{h\to-0}\frac{\sin h}{h}$$

$$=\frac{\pi}{2}\lim_{h\to-0}\frac{\sin^2 h}{h^2}\cdot\frac{h}{1+\cos h}-1$$

$$=0-1=-1$$

よって　$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}\neq\lim_{h\to-0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}$

したがって，$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ で微分可能でない。

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 総合演習49]

次の問いに答えよ。

(1) $f(x)=(x-1)^2Q(x)$ ($Q(x)$ は整式) のとき，$f'(x)$ が $x-1$ で割り切れることを示せ。

(2) a，b は定数とする。$g(x)=ax^{n+1}+bx^n+1$ (n は2以上の自然数) が $(x-1)^2$ で割り切れるとき，a，b を n で表せ。

解答 (1) 略　(2) $a=n$，$b=-n-1$

解説

(1) $f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)=(x-1)\{2Q(x)+(x-1)Q'(x)\}$

よって，$f'(x)$ は $x-1$ で割り切れる。

(2) $g(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れるから，(1) の結果より $g'(x)=a(n+1)x^n+bnx^{n-1}$ が $x-1$ で割り切れる。

よって　$g(1)=0$，$g'(1)=0$

したがって　$a+b+1=0$　……①

$a(n+1)+bn=0$　……②

①×n－② から　$-a+n=0$　すなわち　$a=n$

このとき，① から　$b=-n-1$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ　総合演習50]

関数 $y=x^{\sqrt{x}}$　$(x>0)$ について，導関数 y' を求め，$y'=0$ となる x の値を求めよ。

解答　$y'=x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\log x+1\right)$，$x=\frac{1}{e^2}$

解説

$x>0$ であるから　$x^{\sqrt{x}}>0$

両辺の自然対数をとると　$\log y=\log x^{\sqrt{x}}$　すなわち　$\log y=\sqrt{x}\log x$

両辺の関数を x で微分すると　$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\log x+\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\log x+1\right)$

よって　$y'=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\log x+1\right)\cdot x^{\sqrt{x}}=x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\log x+1\right)$

$y'=0$ のとき，$x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}>0$ から　$\frac{1}{2}\log x+1=0$

よって　$x=\frac{1}{e^2}$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ　総合演習51]

$f(x)$ は0でない x の整式で，次の等式を満たしているものとする。

$$(x-1)f''(x)+(2x-3)f'(x)-8f(x)=0,\quad f(2)=8$$

(1)　$f(x)$ の次数を求めよ。

(2)　$f(x)$ を求めよ。

解答　(1)　4　(2)　$f(x)=x^4-3x^2+2x$

解説

(1)　$f(x)$ を定数関数とすると，第2式から　$f(x)=8$

これは第1式を満たさないから適さない。

$f(x)$ の次数を n $(n\geqq1)$ として，$f(x)$ の最高次の項を ax^n $(a\neqq0)$ とおく。

$(x-1)f''(x)+(2x-3)f'(x)-8f(x)$ の x^n の項は

$$2x\cdot anx^{n-1}-8ax^n=(2n-8)ax^n$$

$(x-1)f''(x)+(2x-3)f'(x)-8f(x)=0$ は x についての恒等式であるから，x^n の係数において

$$(2n-8)a=0$$

が成り立つ。

$a\neqq0$ より　$2n-8=0$　よって　$n=4$

したがって，$f(x)$ の次数は　4

(2)　(1)の結果から

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\ (a\neqq0)$$

とおける。

よって　$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$

$f''(x)=12ax^2+6bx+2c$

これらを $(x-1)f''(x)+(2x-3)f'(x)-8f(x)=0$ に代入して整理すると

$$-2bx^3+(-12a-3b-4c)x^2+(-6b-4c-6d)x+(-2c-3d-8e)=0$$

これが x についての恒等式であるから

$-2b=0$

$-12a-3b-4c=0$

$-6b-4c-6d=0$

$-2c-3d-8e=0$

これを解くと　$b=0$，$c=-3a$，$d=2a$，$e=0$

よって　$f(x)=a(x^4-3x^2+2x)$

ここで，$f(2)=8$ より　$8a=8$

すなわち　$a=1$　これは，$a\neqq0$ を満たす。

したがって　$f(x)=x^4-3x^2+2x$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ　総合演習52]

関数 $y=\frac{1}{1-7x}$ の第 n 次導関数 $y^{(n)}$ を求めよ。

解答　$y^{(n)}=n!\cdot7^n(1-7x)^{-n-1}$

解説

$y=(1-7x)^{-1}$ から

$y'=-(1-7x)^{-2}\cdot(-7)=7(1-7x)^{-2}$

$y''=7\cdot(-2)(1-7x)^{-3}\cdot(-7)=2\cdot7^2(1-7x)^{-3}$

$y'''=2\cdot7^2\cdot(-3)(1-7x)^{-4}\cdot(-7)=2\cdot3\cdot7^3(1-7x)^{-4}$

よって，$y^{(n)}=n!\cdot7^n(1-7x)^{-n-1}$　……① と推測できる。

これを数学的帰納法を用いて証明する。

[1]　$n=1$ のとき

左辺$=y'=7(1-7x)^{-2}$

右辺$=1!\cdot7^1(1-7x)^{-1-1}=7(1-7x)^{-2}$

よって，$n=1$ のとき，① が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち $y^{(k)}=k!\cdot7^k(1-7x)^{-k-1}$ が成り立つと仮定する。

このとき　$y^{(k+1)}=\frac{d}{dx}\{k!\cdot7^k(1-7x)^{-k-1}\}$

$=k!\cdot7^k(-k-1)(1-7x)^{-k-2}\cdot(-7)$

$=(k+1)\cdot k!\cdot7^{k+1}(1-7x)^{-k-2}$

$=(k+1)!\cdot7^{k+1}(1-7x)^{-(k+1)-1}$

よって，$n=k+1$ のときも ① が成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

したがって　$y^{(n)}=n!\cdot7^n(1-7x)^{-n-1}$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ　総合演習53]

$1+2x-3x^2\leqq f(x)\leqq1+2x+3x^2$ が成り立つような関数 $f(x)$ に対し，$f'(0)$ を右側極限と左側極限を考えることにより求めよ。

解答　$f'(0)=2$

解説

$1+2x-3x^2\leqq f(x)\leqq1+2x+3x^2$ に $x=0$ を代入すると　$1\leqq f(0)\leqq1$

すなわち　$f(0)=1$

よって　$2x-3x^2\leqq f(x)-f(0)\leqq2x+3x^2$　……①

$x>0$ のとき，① の各辺を x で割ると　$2-3x\leqq\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\leqq2+3x$

よって　$\lim_{x\to+0}(2-3x)\leqq\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\leqq\lim_{x\to+0}(2+3x)$

$\lim_{x\to+0}(2-3x)=\lim_{x\to+0}(2+3x)=2$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2\quad\cdots\cdots②$$

また，$x<0$ のとき，① の各辺を x で割ると　$2+3x\leqq\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\leqq2-3x$

よって　$\lim_{x\to-0}(2+3x)\leqq\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\leqq\lim_{x\to-0}(2-3x)$

$\lim_{x\to-0}(2+3x)=\lim_{x\to-0}(2-3x)=2$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2\quad\cdots\cdots③$$

②，③ から　$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2$