[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題199]
次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $2+\dfrac{2}{1+2}+\dfrac{2}{1+2+3}+\cdots\cdots+\dfrac{2}{1+2+3+\cdots\cdots+n}+\cdots\cdots$

(2) $\dfrac{3}{1^2\cdot 2^2}+\dfrac{5}{2^2\cdot 3^2}+\dfrac{7}{3^2\cdot 4^2}+\cdots\cdots+\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\cdots\cdots$

解答 (1) 収束，和は 4　(2) 収束，和は 1

解説
第 n 項までの部分和を S_n とする。

(1) $\dfrac{2}{1+2+3+\cdots\cdots+n}=\dfrac{2}{\frac{1}{2}n(n+1)}=4\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

であるから

$$S_n=4\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}=4\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}4\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=4$

したがって，この無限級数は収束して，その和は 4 である。

(2) $\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}$

であるから

$$S_n=\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\cdots\cdots+\left\{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}=1$

したがって，この無限級数は収束して，その和は 1 である。

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題200]
次の無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

$\cos\theta-\cos^2\theta+\cos^3\theta-\cos^4\theta+\cdots\cdots\quad(0<\theta<\pi)$

解答 収束；和は $\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$

解説
無限等比級数の初項を a，公比を r とすると　$a=\cos\theta$，$r=-\cos\theta$

[1] $a=0$ のとき

$0<\theta<\pi$ より　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

このとき，無限等比級数は収束して，その和は 0 である。

[2] $a\neq 0$ すなわち $\theta\neq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$|r|<1$ であるから，無限等比級数は収束して，その和は

$$\frac{\cos\theta}{1-(-\cos\theta)}=\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

[2] で求めた和は，[1] のときも成り立つ。

よって，与えられた無限等比級数は収束して，その和は $\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$ である。

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題201]
ある無限等比級数の和が -4 で，その第 2 項が 3 である。この無限等比級数の初項と公比を求めよ。

解答 初項 -6，公比 $-\dfrac{1}{2}$

解説
初項を a，公比を r とする。
和が 0 でないから　$a\neq 0$
また，無限等比級数が収束することから　$|r|<1$

条件から　$\dfrac{a}{1-r}=-4$　……①，$ar=3$　……②

① より　$a=-4(1-r)$

これを ② に代入して整理すると　$4r^2-4r-3=0$

これを解くと　$r=-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}$

$|r|<1$ から　$r=-\dfrac{1}{2}$

② より　$a=-6$　これは $a\neq 0$ を満たす。

よって　初項 -6，公比 $-\dfrac{1}{2}$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題202]
和が 1 の無限等比級数がある。この各項を 2 乗して得られる無限等比級数の和は 3 である。各項を 3 乗して得られる無限等比級数の和を求めよ。

解答 3

解説
和が 1 の無限等比級数の初項を a，公比を r とする。
和が 0 でないから　$a\neq 0$
無限等比級数が収束することから　$|r|<1$

また　$\dfrac{a}{1-r}=1$

よって　$a=1-r$　……①

この無限等比級数の各項を 2 乗して得られる無限等比級数の初項は a^2，公比は r^2 であり，$|r^2|=|r|^2<1$ より，収束して

$$\frac{a^2}{1-r^2}=3$$

すなわち　$a^2=3(1-r^2)$　……②

① を ② に代入すると　$(1-r)^2=3(1-r)(1+r)$

$r\neq 1$ であるから　$1-r=3(1+r)$　これを解いて　$r=-\dfrac{1}{2}$

$r=-\dfrac{1}{2}$ を ① に代入すると　$a=\dfrac{3}{2}$

これらは，$a\neq 0$，$|r|<1$ を満たす。

和が 1 である無限等比級数の各項を 3 乗して得られる無限等比級数の初項は a^3，公比は r^3 であり，$|r^3|=|r|^3<1$ より収束して，その和は

$$\frac{a^3}{1-r^3}=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^3}=3$$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題203]
初項 1，公比 $\dfrac{1}{3}$ の無限等比級数について，その和 S と初項から第 n 項までの部分和 S_n の差が，初めて $\dfrac{1}{1000}$ より小さくなるような自然数 n を求めよ。

解答 $n=7$

解説
初項 1，公比 $\dfrac{1}{3}$ の無限等比級数は，公比について $\left|\dfrac{1}{3}\right|<1$ であるから，収束して

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

また　$S_n=\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

よって　$|S-S_n|=\dfrac{3}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

したがって，$\dfrac{3}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n<\dfrac{1}{1000}$　……① となるような最小の自然数 n を求めればよい。

① から　$\dfrac{1}{2\cdot 3^{n-1}}<\dfrac{1}{1000}$

すなわち　$3^{n-1}>500$

$3^5=243$，$3^6=729$ であるから　$n-1\geqq 6$

よって　$n\geqq 7$

したがって，求める n の値は　$n=7$

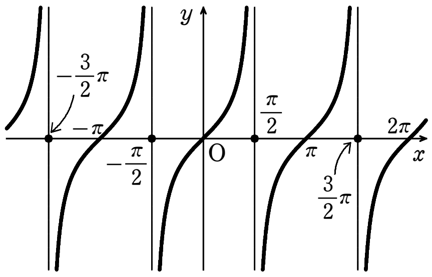
表題

［改訂版4プロセス数学Ⅲ　問題204］

無限等比級数で表された次の関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

$$f(x)=\sin x\cos x+\sin^3 x\cos x+\sin^5 x\cos x+\cdots\cdots$$

解答　［図］



解説

$f(x)$ は初項 $\sin x\cos x$，公比 $\sin^2 x$ の無限等比級数である。

［1］　初項が 0 すなわち　$\sin x\cos x=0$ のとき

$f(x)=0$

$\sin x\cos x=0$ から　　$\sin 2x=0$

よって　　$2x=n\pi$　（n は整数）

ゆえに　　$x=\dfrac{n\pi}{2}$　（n は整数）

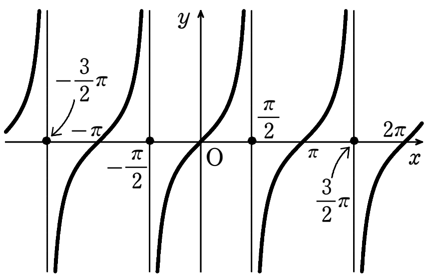
［2］　$\sin x\cos x\fallingdotseq 0$ すなわち $x\fallingdotseq\dfrac{n\pi}{2}$（$n$ は整数）のとき，$0<\sin^2 x<1$ であるから，

$f(x)$ は収束して

$$f(x)=\frac{\sin x\cos x}{1-\sin^2 x}=\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}=\tan x$$

よって　　$f(x)=\begin{cases}0 & \left(x=\dfrac{n\pi}{2},\ n \text{ は整数}\right)\\ \tan x & \left(x\fallingdotseq\dfrac{n\pi}{2},\ n \text{ は整数}\right)\end{cases}$

$y=f(x)$ のグラフは［図］のようになる。



［改訂版4プロセス数学Ⅲ　問題205］

次の無限級数の和を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\cos n\pi$　　　　(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\sin\frac{n}{2}\pi$

解答　(1)　$-\dfrac{1}{4}$　　(2)　$-\dfrac{3}{10}$

解説

(1)　$\cos n\pi=(-1)^n$ であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\cos n\pi=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=-\frac{1}{4}$$

(2)　k を自然数とする。

$n=2k$ のとき　　$\sin\dfrac{n}{2}\pi=\sin k\pi=0$

$n=2k-1$ のとき　　$\sin\dfrac{n}{2}\pi=\sin\left\{\dfrac{\pi}{2}\times(2k-1)\right\}=(-1)^{k-1}$

であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\sin\frac{n}{2}\pi=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{3^7}-\cdots\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{9}\right)}=-\frac{3}{10}$$

［改訂版4プロセス数学Ⅲ　問題206］

次のものが収束するような x の値の範囲を求めよ。

(1)　無限数列 $\{(x^2-2x)^n\}$　　　　(2)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x^2-2x)^n$

解答　(1)　$1-\sqrt{2}\leqq x<1$，$1<x\leqq 1+\sqrt{2}$　　(2)　$1-\sqrt{2}<x<1$，$1<x<1+\sqrt{2}$

解説

(1)　この無限数列が収束するための必要十分条件は　　$-1<x^2-2x\leqq 1$

$-1<x^2-2x$ から　　$(x-1)^2>0$

よって　　$x<1$，$1<x$　……①

$x^2-2x\leqq 1$ から　　$x^2-2x-1\leqq 0$

よって　　$1-\sqrt{2}\leqq x\leqq 1+\sqrt{2}$　……②

①，② の共通範囲を求めて　　$1-\sqrt{2}\leqq x<1$，$1<x\leqq 1+\sqrt{2}$

(2)　この無限級数は初項 x^2-2x，公比 x^2-2x の無限等比級数である。

よって，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は

$x^2-2x=0$　……①

または　　$|x^2-2x|<1$　……②

① は ② に含まれるから，② を満たす実数 x の値の範囲を求めればよい。

② から　　$-1<x^2-2x<1$

$-1<x^2-2x$ から　　$(x-1)^2>0$

よって　　$x<1$，$1<x$　……③

$x^2-2x<1$ から　　$x^2-2x-1<0$

よって　　$1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$　……④

③，④ の共通範囲を求めて　　$1-\sqrt{2}<x<1$，$1<x<1+\sqrt{2}$

［改訂版4プロセス数学Ⅲ　問題207］

あるボールを床に落とすと，常に落ちる高さの $\dfrac{4}{5}$ まではね返るという。このボールを 2 m の高さから落としたとき，床で静止するまでに，このボールが上下する距離の総和を求めよ。

解答　18 m

解説

ボールを 2 m の高さから落として，最初にはね返る高さを a_1，2 回目にはね返る高さを a_2，以下順にはね返る高さを a_3，a_4，…… とする。

床で静止するまでに，このボールが上下する距離の総和を S m とすると

$$S=2+2(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots)=2+2\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

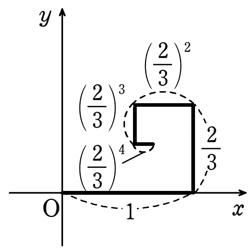
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は初項 $2\times\dfrac{4}{5}$，公比 $\dfrac{4}{5}$ の無限等比級数である。公比について，$\left|\dfrac{4}{5}\right|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{2\times\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}=8$$

よって　　$S=2+2\times 8=18$ (m)

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題208]

平面上で，点Pが原点Oから出発して，x 軸の正の方向に1だけ進み，次に y 軸の正の方向に $\dfrac{2}{3}$ だけ進む。以下，x 軸の負の方向，y 軸の負の方向，x 軸の正の方向，…… と向きを変え，それぞれ $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$，$\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$，$\left(\dfrac{2}{3}\right)^4$，…… と進む運動を限りなく続けるとき，点Pの極限の位置の座標を求めよ。



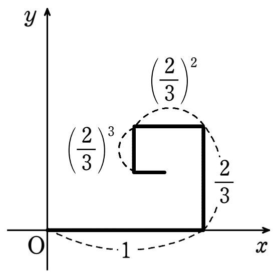
解答　$\left(\dfrac{9}{13},\ \dfrac{6}{13}\right)$

解説

求める点Pの座標を $(x,\ y)$ とする。

$$x=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4-\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots\cdots$$

これは，初項1，公比 $-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$ の無限等比級数である。



公比について，$\left|-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して

$$x=\frac{1}{1-\left\{-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}}=\frac{9}{13}$$

また　$y=\dfrac{2}{3}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^3+\left(\dfrac{2}{3}\right)^5-\left(\dfrac{2}{3}\right)^7+\cdots\cdots$

これは，初項 $\dfrac{2}{3}$，公比 $-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$ の無限等比級数であるから，収束して

$$y=\frac{\frac{2}{3}}{1-\left\{-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}}=\frac{6}{13}$$

よって，点Pの極限の位置の座標は，$\left(\dfrac{9}{13},\ \dfrac{6}{13}\right)$ である。

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題209]

正三角形ABCの内接円 O_1 の半径を r とする。辺AB，ACと円 O_1 とに接する円を O_2 とし，AB，ACと円 O_2 とに接する円を O_3 とする。このように，半径が次々に小さくなる円 O_1，O_2，O_3，……，O_n，…… を作る。

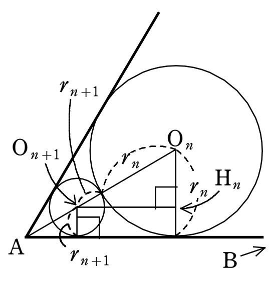
(1)　円 O_n の半径を r_n とするとき，r_{n+1} と r_n の関係式を求めよ。

(2)　すべての円の面積の和を求めよ。

解答　(1)　$r_{n+1}=\dfrac{1}{3}r_n$　　(2)　$\dfrac{9}{8}\pi r^2$

解説

(1)　円 O_n の半径を r_n，点 O_{n+1} を通り辺ABに平行な直線と点 O_n からABに下ろした垂線との交点を H_n とする。



$\triangle O_nO_{n+1}H_n$ において，

$\angle O_nO_{n+1}H_n=\dfrac{\pi}{6}$ であるから

$$O_nO_{n+1}\sin\frac{\pi}{6}=O_nH_n$$

すなわち　$(r_n+r_{n+1})\cdot\dfrac{1}{2}=r_n-r_{n+1}$

よって　$r_{n+1}=\dfrac{1}{3}r_n$

(2)　(1)から　$r_n=r\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

よって，円 O_n の面積を S_n とすると　$S_n=\pi r_n{}^2=\pi r^2\left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}$

したがって，すべての円の面積の和 $S=S_1+S_2+S_3+\cdots\cdots+S_n+\cdots\cdots$ は，初項 πr^2，公比 $\dfrac{1}{9}$ の無限等比級数である。

公比について，$\left|\dfrac{1}{9}\right|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して

$$S=\pi r^2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{8}\pi r^2$$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題210]

$-1<r<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ が成り立つ。これを利用して，次の無限級数の和を求めよ。ただし，(2)において $|x|<1$ とする。

(1)　$1+2\left(\dfrac{1}{2}\right)+3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots\cdots$

(2)　$1+2x+3x^2+\cdots\cdots+nx^{n-1}+\cdots\cdots$

解答　(1)　4　　(2)　$\dfrac{1}{(1-x)^2}$

解説

第 n 項までの部分和を S_n とする。

(1)
$$S_n=1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\frac{1}{2}S_n=\quad\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots+(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

辺々を引くと

$$S_n-\frac{1}{2}S_n=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

よって　$\dfrac{1}{2}S_n=2\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}-n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

したがって　$S_n=4\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}-2n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$\left|\dfrac{1}{2}\right|<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

よって，求める和は　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=4$

(2)
$$S_n=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots+nx^{n-1}$$
$$xS_n=\quad x+2x^2+3x^3+\cdots\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n$$

辺々を引くと

$$(1-x)S_n=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^{n-1}-nx^n$$

$|x|<1$ であるから　$1-x\neq 0$

よって　$S_n=\dfrac{\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n}{1-x}$

$|x|<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^n=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nx^n=0$

したがって，求める和は　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{1}{1-x}}{1-x}=\frac{1}{(1-x)^2}$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題211]

次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $1+1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{8}-\cdots\cdots$

(2) $3-\dfrac{5}{2}+\dfrac{5}{2}-\dfrac{7}{3}+\dfrac{7}{3}-\dfrac{9}{4}+\dfrac{9}{4}-\cdots\cdots$

解答 (1) 収束，和は $\dfrac{11}{4}$ (2) 発散

解説

第 n 項までの部分和を S_n とする。

(1) $S_{2n}=\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)+\left\{1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\cdots\cdots+\dfrac{1}{(-3)^{n-1}}\right\}$

$$=\left\{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}+\left\{1+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\cdots\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}+\frac{3}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

$S_{2n-1}=S_{2n}-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n}=2+\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\frac{11}{4}-0=\frac{11}{4}$

したがって，無限級数は収束して，和は $\dfrac{11}{4}$

(2) $S_{2n}=3-\dfrac{5}{2}+\dfrac{5}{2}-\dfrac{7}{3}+\dfrac{7}{3}-\dfrac{9}{4}+\dfrac{9}{4}-\cdots\cdots-\dfrac{2n+1}{n}+\dfrac{2n+1}{n}-\dfrac{2n+3}{n+1}$

$$=3-\frac{2n+3}{n+1}$$

$S_{2n-1}=S_{2n}-\left(-\dfrac{2n+3}{n+1}\right)=3$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2n+3}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)=1$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=3$

したがって，無限級数は発散する。

参考 第 n 項を a_n とすると $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2n+3}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)=-2$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{2n}\neq 0$ から，数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束しない。

よって，この無限級数は発散する。

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題221]

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x+2}-2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

解答 (1) $\dfrac{3}{2}$ (2) 1 (3) 1 (4) $\dfrac{2}{3}$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(\sqrt{x^2+3}+2x)(\sqrt{x^2+3}-2x)}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}-2x)}$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x^2+3)-(2x)^2}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}-2x)}=\lim_{x\to-1}\frac{-3(x+1)(x-1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}-2x)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{-3(x-1)}{\sqrt{x^2+3}-2x}=\frac{-3\cdot(-2)}{2-(-2)}=\frac{3}{2}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x+2}-2}=\lim_{x\to2}\left\{\frac{(x-\sqrt{3x-2})(x+\sqrt{3x-2})}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+2}{x+\sqrt{3x-2}}\right\}$

$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{x^2-(3x-2)}{(x+2)-2^2}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+2}{x+\sqrt{3x-2}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{(x-1)(x-2)}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+2}{x+\sqrt{3x-2}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(\sqrt{x+2}+2)}{x+\sqrt{3x-2}}=\frac{1\cdot(2+2)}{2+2}=1$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}}$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})}{(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x})}\times\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{(1+x)-(1+x^2)}{(1-x^2)-(1-x)}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{1+1}{1+1}=1$$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{(1+x)-(1-x)}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}$$

$$=\frac{2}{1+1+1}=\frac{2}{3}$$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題222]

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1})$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}}$

解答 (1) 1 (2) -2

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{2-0}{1+1}=1$$

(2) $x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき $t\longrightarrow\infty$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2+1}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+1}}{(\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2+1})(\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+1})}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+1}}{(t^2-t+1)-(t^2+1)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+1}}{-t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\right)$$

$$=-1-1=-2$$

別解 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}}\times\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}}{(x^2+x+1)-(x^2+1)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=-1-1=-2$$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題223]

次の関数について，$x \longrightarrow 0$ のときの極限を調べよ。

(1) $3^{\frac{1}{x}}$　　(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$　　(3) $2^{\frac{1}{x^2}}$

解答 (1) 極限はない　(2) 極限はない　(3) 正の無限大に発散

解説

(1) $\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=\infty$，$\lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty$ であるから　$\lim_{x\to+0}3^{\frac{1}{x}}=\infty$，$\lim_{x\to-0}3^{\frac{1}{x}}=0$

よって，極限はない。

(2) $\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=\infty$，$\lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty$ であるから　$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim_{x\to-0}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\infty$

よって，極限はない。

(3) $\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to-0}\frac{1}{x^2}=\infty$ であるから　$\lim_{x\to0}2^{\frac{1}{x^2}}=\infty$

よって，正の無限大に発散する。

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題224]

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}(5^x-3^x)$　　(2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5^{x+1}}{4^x}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{3^{x+1}-3^{-x}}{3^x}$　　(4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{(0.5)^x-(0.5)^{-x}}{(0.5)^x+(0.5)^{-x}}$

解答 (1) ∞　(2) 0　(3) 3　(4) 1

解説

(1) $\lim_{x\to\infty}(5^x-3^x)=\lim_{x\to\infty}5^x\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^x\right\}=\infty$

(2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5^{x+1}}{4^x}=\lim_{x\to-\infty}5\left(\frac{5}{4}\right)^x=0$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{3^{x+1}-3^{-x}}{3^x}=\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{3^{2x}}\right)=3$

(4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{(0.5)^x-(0.5)^{-x}}{(0.5)^x+(0.5)^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-(0.5)^{-2x}}{1+(0.5)^{-2x}}=1$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題225]

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}\{\log_{10}x-\log_{10}(x-1)\}$　　(2) $\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x^2-x+1)-\log_2(x^2+2)\}$

解答 (1) 0　(2) 2

解説

(1) $\lim_{x\to\infty}\{\log_{10}x-\log_{10}(x-1)\}=\lim_{x\to\infty}\log_{10}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\log_{10}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\log_{10}1=0$

(2) $\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x^2-x+1)-\log_2(x^2+2)\}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x^2-x+1}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}$

$=\log_2 4=2$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題226]

次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

(1) $\lim_{x\to2}\frac{ax^2+bx}{x-2}=1$　　(2) $\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+1}-b}{x-1}=\sqrt{2}$

解答 (1) $a=\frac{1}{2}$，$b=-1$　(2) $a=4$，$b=4\sqrt{2}$

解説

(1) $\lim_{x\to2}\frac{ax^2+bx}{x-2}=1$ …… ①

が成り立つとする。

$\lim_{x\to2}(x-2)=0$ であるから　$\lim_{x\to2}(ax^2+bx)=0$

よって，$4a+2b=0$ となり　$b=-2a$ …… ②

このとき　$\lim_{x\to2}\frac{ax^2+bx}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{ax^2-2ax}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{ax(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}ax=2a$

$2a=1$ のとき ① が成り立つから　$a=\frac{1}{2}$

このとき，② から　$b=-1$

したがって　$a=\frac{1}{2}$，$b=-1$

(2) $\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+1}-b}{x-1}=\sqrt{2}$ …… ①

が成り立つとする。

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$ であるから　$\lim_{x\to1}(a\sqrt{x+1}-b)=0$

よって，$\sqrt{2}a-b=0$ となり　$b=\sqrt{2}a$ …… ②

このとき

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+1}-b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+1}-\sqrt{2}a}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{a\{(x+1)-2\}}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{a}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}=\frac{a}{2\sqrt{2}}$$

$\frac{a}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ のとき ① が成り立つから　$a=4$

このとき，② から　$b=4\sqrt{2}$

したがって　$a=4$，$b=4\sqrt{2}$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題227]

関数 $f(x)=\frac{ax^2-x}{x-1}$ について，$x\longrightarrow1$ のときの極限値が存在するように，定数 a の値を定め，極限値 $\lim_{x\to1}f(x)$ を求めよ。

解答 $a=1$，$\lim_{x\to1}f(x)=1$

解説

関数 $f(x)=\frac{ax^2-x}{x-1}$ について，$x\longrightarrow1$ のときの極限値が存在するとする。

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$ であるから　$\lim_{x\to1}(ax^2-x)=0$

よって，$a-1=0$ となり　$a=1$

このとき　$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}x=1$

したがって　$a=1$，$\lim_{x\to1}f(x)=1$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題228]

次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}+ax+b)=0$

解答 $a=-1$，$b=0$

解説

$f(x)=\sqrt{x^2-1}+ax+b$ とおいて，$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ が成り立つとする。

$a\geqq0$ のとき $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ となるから　$a<0$

$x\longrightarrow\infty$ のときを考えるから，$x>0$ としてよい。

$x>0$ のとき

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2-1}+ax+b)\{\sqrt{x^2-1}-(ax+b)\}}{\sqrt{x^2-1}-(ax+b)}=\frac{(x^2-1)-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2-1}-(ax+b)}$$

$$=\frac{(1-a^2)x^2-2abx-(1+b^2)}{\sqrt{x^2-1}-(ax+b)}=\frac{(1-a^2)x-2ab-\frac{1+b^2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}}$$

$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ となるためには　$1-a^2=0$

$1-a^2=0$ と $a<0$ から　$a=-1$

このとき　$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2b-\frac{1+b^2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1-\frac{b}{x}}=b$

$b=0$ のとき $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ が成り立つ。

よって　$a=-1$，$b=0$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題229]

次の 2 つの条件をともに満たす 3 次関数 $f(x)$ を求めよ。

[1] $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=3$　　[2] $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=-1$

解答　$f(x)=2x^3-5x^2+3x$

解説

[1], [2] より $\displaystyle\lim_{x\to0}x=0$, $\displaystyle\lim_{x\to1}(x-1)=0$ であるから

$\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=0$

すなわち　$f(0)=0$, $f(1)=0$

よって, $f(x)$ は x, $x-1$ を因数にもつ 3 次関数であるから

$f(x)=x(x-1)(ax+b)$　$(a\neq0)$

とおける。

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}(x-1)(ax+b)=-b$

[1] から　$-b=3$　……①

また　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}x(ax+b)=a+b$

[2] から　$a+b=-1$　……②

①, ② から　$a=2$, $b=-3$　　これは $a\neq0$ を満たす。

したがって　$f(x)=x(x-1)(2x-3)=2x^3-5x^2+3x$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題230]

次の 2 つの条件をともに満たす整式で表された関数 $f(x)$ を求めよ。

[1] $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1$　　[2] $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=-3$

解答　$f(x)=2x^3+x^2-3x$

解説

[1] において, 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}$ が存在するから, $f(x)-2x^3$ は 2 次以下の整式である。

よって, $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ とおける。

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)=a$

[1] から　$a=1$

[2] において, $\displaystyle\lim_{x\to0}x=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=0$

すなわち　$f(0)=0$

よって　$c=0$

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}(2x^2+x+b)=b$

[2] から　$b=-3$

したがって　$f(x)=2x^3+x^2-3x$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題233]

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}x^2\cos\frac{1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x}$

解答　(1) 0　(2) 0

解説

(1) $0\leqq\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leqq1$ より　$0\leqq\left|x^2\cos\frac{1}{x}\right|=|x^2|\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leqq|x^2|$

ここで, $\displaystyle\lim_{x\to0}|x^2|=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to0}\left|x^2\cos\frac{1}{x}\right|=0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to0}x^2\cos\frac{1}{x}=0$

(2) $0\leqq|\sin x|\leqq1$ から　$0\leqq\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqq\left|\frac{1}{x}\right|$

ここで, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left|\frac{1}{x}\right|=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題234]

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{1-\cos x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan2x-\sin x}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x^2}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin2x}$

解答　(1) 2　(2) 1　(3) 2　(4) $\dfrac{1}{4}$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}(1+\cos x)=2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan2x-\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{\sin2x}{\cos2x}-\sin x\right)=\lim_{x\to0}\left(2\cdot\frac{\sin2x}{2x}\cdot\frac{1}{\cos2x}-\frac{\sin x}{x}\right)$

$=2\cdot1\cdot1-1=1$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos2x)(1+\cos2x)}{x^2(1+\cos2x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^22x}{x^2(1+\cos2x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{\sin^22x}{x^2(1+\cos2x)}=\lim_{x\to0}\left\{4\cdot\left(\frac{\sin2x}{2x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos2x}\right\}$

$=4\cdot1^2\cdot\dfrac{1}{2}=2$

別解　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\left\{2\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right\}=2\cdot1^2=2$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin2x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin2x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{x\sin2x(1+\cos x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x\sin2x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sin2x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right\}$

$=1^2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題235]

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x^\circ}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3\cos x}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin3x+\sin x}{\sin2x}$

解答　(1) $\dfrac{\pi}{180}$　(2) 1　(3) $\dfrac{1}{2}$　(4) 2

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x^\circ}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan\frac{\pi}{180}x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{180}x}{\frac{\pi}{180}x}\cdot\frac{\frac{\pi}{180}}{\cos\frac{\pi}{180}x}\right)=1\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{180}$

(2) $\sin x=t$ とおくと　$x\longrightarrow0$ のとき $t\longrightarrow0$

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3\cos x}\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x^3\cos^2x}(1-\cos x)$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x^3\cos^2x}\cdot\frac{1-\cos^2x}{1+\cos x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x^3\cos^2x}\cdot\frac{\sin^2x}{1+\cos x}\right)$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\cdot\frac{1}{\cos^2x(1+\cos x)}\right\}=1^3\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin3x+\sin x}{\sin2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\sin2x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2x}{\sin2x}\right)$

$=\dfrac{3}{2}\cdot1\cdot1+\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1=2$

別解　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin3x+\sin x}{\sin2x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin2x\cos x}{\sin2x}=\lim_{x\to0}2\cos x=2$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題236]

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x\sin\frac{1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}2x\sin\frac{1}{x}$

解答　(1) 1　(2) 2

解説

(1) $\dfrac{1}{x}=t$ とおくと　$x\longrightarrow-\infty$ のとき $t\longrightarrow-0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to-0}\frac{\sin t}{t}=1$

(2) $\dfrac{1}{x}=t$ とおくと　$x\longrightarrow\infty$ のとき $t\longrightarrow+0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}2x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to+0}\frac{2\sin t}{t}=2$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題237]

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}$

解答 (1) 1　(2) $-\pi$

解説

(1) $x-\pi=t$ とおくと　$x\longrightarrow\pi$ のとき $t\longrightarrow 0$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

(2) $x-1=t$ とおくと　$x\longrightarrow 1$ のとき $t\longrightarrow 0$

$$\sin\pi x=\sin\pi(t+1)=\sin(\pi+\pi t)=-\sin\pi t$$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin\pi t}{t}=\lim_{t\to 0}\left\{\pi\cdot\left(-\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)\right\}=-\pi$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題238]

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{ax\sin x+b}{\cos x-1}=1$ が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

解答 $a=-\dfrac{1}{2}$，$b=0$

解説

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{ax\sin x+b}{\cos x-1}=1$　…… ① が成り立つとする。

$\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x-1)=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to 0}(ax\sin x+b)=0$

すなわち　$b=0$

このとき

$$\frac{ax\sin x+b}{\cos x-1}=\frac{ax\sin x}{\cos x-1}=\frac{ax\sin x(\cos x+1)}{(\cos x-1)(\cos x+1)}$$

$$=\frac{ax\sin x(\cos x+1)}{\cos^2 x-1}=\frac{ax\sin x(\cos x+1)}{-\sin^2 x}$$

$$=\frac{-ax(\cos x+1)}{\sin x}=\frac{x}{\sin x}\cdot(-a)(\cos x+1)$$

であるから

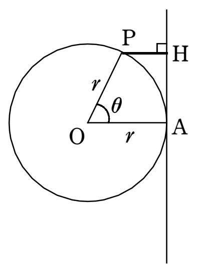
$$\lim_{x\to 0}\frac{ax\sin x+b}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x}{\sin x}\cdot(-a)(\cos x+1)\right\}=1\cdot(-a)\cdot 2=-2a$$

$-2a=1$ のとき ① が成り立つから　$a=-\dfrac{1}{2}$

よって　$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=0$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題239]

半径 r の円 O の周上に定点 A と動点 P があり，右の図のように，A における円 O の接線に P から下ろした垂線を PH とする。$\angle\mathrm{POA}=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とし，θ に対する弧 AP の長さを $\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$ で表すとき，次の問いに答えよ。



(1) AH，PH，$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$ を，θ を用いてそれぞれ表せ。

(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{AH}^2}{\mathrm{PH}}$，$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\overset{\frown}{\mathrm{AP}}^2}{\mathrm{PH}}$ を求めよ。

解答 (1) $\mathrm{AH}=r\sin\theta$，$\mathrm{PH}=r(1-\cos\theta)$，$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}=r\theta$

(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{AH}^2}{\mathrm{PH}}=2r$，$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\overset{\frown}{\mathrm{AP}}^2}{\mathrm{PH}}=2r$

解説

(1) 点 P から OA に下ろした垂線を PQ とすると

$$\mathrm{AH}=\mathrm{QP}=r\sin\theta$$

$$\mathrm{PH}=\mathrm{QA}=\mathrm{OA}-\mathrm{OQ}=r-r\cos\theta=r(1-\cos\theta)$$

$$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}=r\theta$$

(2) $$\frac{\mathrm{AH}^2}{\mathrm{PH}}=\frac{(r\sin\theta)^2}{r(1-\cos\theta)}=\frac{r^2\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{r(1-\cos^2\theta)}$$

$$=\frac{r^2\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{r\sin^2\theta}=r(1+\cos\theta)$$

$$\frac{\overset{\frown}{\mathrm{AP}}^2}{\mathrm{PH}}=\frac{(r\theta)^2}{r(1-\cos\theta)}=\frac{r^2\theta^2(1+\cos\theta)}{r(1-\cos^2\theta)}$$

$$=\frac{r^2\theta^2(1+\cos\theta)}{r\sin^2\theta}=r\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^2(1+\cos\theta)$$

よって　$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{AH}^2}{\mathrm{PH}}=\lim_{\theta\to+0}r(1+\cos\theta)=2r$

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\overset{\frown}{\mathrm{AP}}^2}{\mathrm{PH}}=\lim_{\theta\to+0}r\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^2(1+\cos\theta)=2r$$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題244]

次の関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続であるように，定数 a の値を定めよ。

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{|x|} & (x\neq 0)\\ a & (x=0)\end{cases}$$

解答 $a=0$

解説

$x<0$ のとき　$f(x)=\dfrac{x^3}{-x}=-x^2$

$x>0$ のとき　$f(x)=\dfrac{x^3}{x}=x^2$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}(-x^2)=0$

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}x^2=0$$

すなわち　$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=0$

また　$f(0)=a$

関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続であるとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$ が成り立つ。

よって　$a=0$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題245]

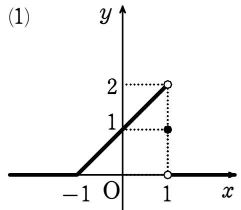
次の関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。また，$f(x)$ が定義されない x の値，および定義域内で $f(x)$ が不連続となる x の値を求めよ。

(1) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$　　(2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+x^n}{2-x^n}$

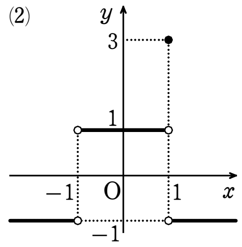
解答　(1) [図]，$f(x)$ が定義されない x の値はない，$x=1$ で不連続

(2) [図]，$f(x)$ は $x=-1$ で定義されない，定義域内では $x=1$ で不連続

(1)



(2)



解説

(1) [1] $x^2<1$ すなわち $-1<x<1$ のとき

$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=0$ であるから　$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=1+x$

[2] $x^2=1$ すなわち $x=\pm1$ のとき

$x=1$ のとき　$f(x)=1$

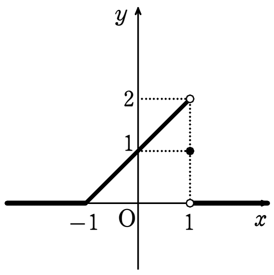
$x=-1$ のとき　$f(x)=0$

[3] $x^2>1$ すなわち $x<-1$，$1<x$ のとき

$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$ であるから　$f(x)=0$

よって，$y=f(x)$ のグラフは [図] のようになり，定義域は実数全体である。

また，$f(x)$ は定義域内の $x=1$ で不連続である。



(2) [1] $|x|<1$ すなわち $-1<x<1$ のとき

$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$ であるから　$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+x^n}{2-x^n}=1$

[2] $x=1$ のとき

$x^n=1$ であるから　$f(x)=\dfrac{2+1}{2-1}=3$

[3] $x=-1$ のとき

n が奇数ならば　$f(-1)=\dfrac{2-1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$

n が偶数ならば　$f(-1)=\dfrac{2+1}{2-1}=3$

よって，$f(x)$ は $\dfrac{1}{3}$，3 を交互にとる。

したがって，$x=-1$ のとき数列 $\left\{\dfrac{2+x^n}{2-x^n}\right\}$ は振動するから，$x=-1$ で $f(x)$ は定義されない。

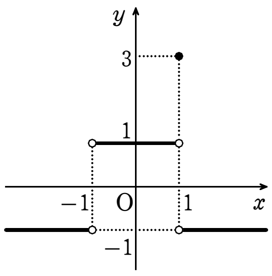
[4] $|x|>1$ すなわち $x<-1$，$1<x$ のとき

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ であるから

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2}{x^n}+1}{\dfrac{2}{x^n}-1}=-1$$

よって，$y=f(x)$ のグラフは [図] のようになり，$x=-1$ で $f(x)$ は定義されない。

また，$f(x)$ は定義域内の $x=1$ で不連続である。



[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題246]

次の方程式の実数解の存在する開区間をすべて求めよ。ただし，区間の幅は 1 とし，その両端は整数値とする。

(1) $x^3+x^2-2x-1=0$　　(2) $2x^3+3x^2-12x-3=0$

解答　(1) $(-2,\ -1)$，$(-1,\ 0)$，$(1,\ 2)$　(2) $(-4,\ -3)$，$(-1,\ 0)$，$(1,\ 2)$

解説

(1) $f(x)=x^3+x^2-2x-1$ とおく。

この関数は実数全体で連続である。

$f'(x)=3x^2+2x-2$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	$\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$f(x)$ は

$x\leqq\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}$，$\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}\leqq x$ で増加し，

$\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}\leqq x\leqq\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$ で減少する。

$-2<\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}<-1$，$0<\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}<1$ であり

$f(-2)=-1<0$，$f(-1)=1>0$，$f(0)=-1<0$，$f(1)=-1<0$，$f(2)=7>0$

したがって，実数解の存在する開区間は　$(-2,\ -1)$，$(-1,\ 0)$，$(1,\ 2)$

(2) $f(x)=2x^3+3x^2-12x-3$ とおく。

この関数は実数全体で連続である。

$f'(x)=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-2$，1

$f(x)$の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$f(x)$ は $x\leqq-2$，$1\leqq x$ で増加し，$-2\leqq x\leqq1$ で減少する。

$f(-4)=-35<0$，$f(-3)=6>0$，$f(-1)=10>0$，$f(0)=-3<0$，

$f(1)=-10<0$，$f(2)=1>0$

したがって，実数解の存在する開区間は　$(-4,\ -3)$，$(-1,\ 0)$，$(1,\ 2)$

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 問題247]

関数 $f(x)$ が連続で $f(0)=-1$，$f(1)=2$，$f(2)=3$，$f(3)=10$ のとき，方程式 $f(x)-x^2=0$ は $0<x<3$ の範囲に少なくとも 3 個の実数解をもつことを示せ。

解答　略

解説

$g(x)=f(x)-x^2$ とおく。

関数 $f(x)$ と x^2 は連続であるから，関数 $g(x)$ は連続である。

$g(0)=f(0)-0^2=-1<0$

$g(1)=f(1)-1^2=2-1=1>0$

$g(2)=f(2)-2^2=3-4=-1<0$

$g(3)=f(3)-3^2=10-9=1>0$

よって，方程式 $g(x)=0$ は区間 $(0,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 3)$ でそれぞれ少なくとも 1 つの実数解をもつ。

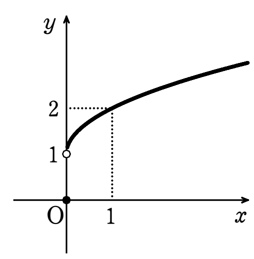
したがって，方程式 $f(x)-x^2=0$ は $0<x<3$ の範囲に少なくとも 3 個の実数解をもつ。

[改訂版4プロセス数学Ⅲ 例題25]

無限等比級数で表された次の関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}+\cdots\cdots$$

解答　[図]



解説

関数 $f(x)$ の定義域は $x\geqq0$ で，この無限等比級数の初項は $\sqrt{x}$，公比は $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ である。

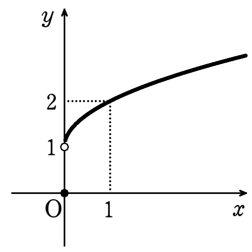
[1] $x=0$ のとき，この無限等比級数は収束し，その和は 0 である。

[2] $x>0$ のとき $0<\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}<1$ であるから，この無限等比級数は収束し，その和は

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}}=1+\sqrt{x}$$

よって　$f(x)=\begin{cases}0 & (x=0)\\ 1+\sqrt{x} & (x>0)\end{cases}$

したがって，関数 $y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



［改訂版4プロセス数学Ⅲ 例題26］

次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\frac{2}{3}-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}-\frac{6}{7}+\frac{6}{7}-\frac{8}{9}+\frac{8}{9}-\cdots\cdots$

(2) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots\cdots$

解答 (1) 発散 (2) 収束，和は $\frac{5}{2}$

解説

第 n 項までの部分和を S_n とする。

(1) $S_{2n}=\frac{2}{3}-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}-\frac{6}{7}+\frac{6}{7}-\cdots\cdots+\frac{2n}{2n+1}-\frac{2n+2}{2n+3}=\frac{2}{3}-\frac{2n+2}{2n+3}$

$S_{2n-1}=S_{2n}-\left(-\frac{2n+2}{2n+3}\right)=\frac{2}{3}$

よって $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}-\frac{2+\frac{2}{n}}{2+\frac{3}{n}}\right)=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$，$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\frac{2}{3}$

したがって，無限級数は発散する。

(2) $S_{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$

$=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}+\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

$S_{2n-1}=S_{2n}-\frac{1}{2^n}$

よって $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$，$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n}-\frac{1}{2^n}\right)=\frac{5}{2}-0=\frac{5}{2}$

したがって，無限級数は収束して，和は $\frac{5}{2}$

［改訂版4プロセス数学Ⅲ 例題27］

次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax}+bx)=4$

解答 $a=8$，$b=-1$

解説

$f(x)=\sqrt{x^2+ax}+bx$ とおいて，$\lim_{x\to\infty}f(x)=4$ が成り立つとする。

$b\geqq 0$ のとき $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ となるから $b<0$

$x\longrightarrow\infty$ のときを考えるから，$x>0$ としてよい。

$x>0$ のとき $f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+ax}+bx)(\sqrt{x^2+ax}-bx)}{\sqrt{x^2+ax}-bx}=\frac{(x^2+ax)-(bx)^2}{\sqrt{x^2+ax}-bx}$

$=\frac{(1-b^2)x^2+ax}{\sqrt{x^2+ax}-bx}=\frac{(1-b^2)x+a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}-b}$

$\lim_{x\to\infty}f(x)=4$ となるためには $1-b^2=0$ 　 $1-b^2=0$ と $b<0$ から $b=-1$

このとき $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}=\frac{a}{2}$

$\frac{a}{2}=4$ のとき $\lim_{x\to\infty}f(x)=4$ が成り立つから $a=8$

よって $a=8$，$b=-1$

［改訂版4プロセス数学Ⅲ 例題28］

次の 2 つの条件をともに満たす 3 次関数 $f(x)$ を求めよ。

[1] $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$ 　 [2] $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=3$

解答 $f(x)=5x^3-7x^2+2x$

解説

[1]，[2] より $\lim_{x\to 0}x=0$，$\lim_{x\to 1}(x-1)=0$ であるから

$\lim_{x\to 0}f(x)=0$，$\lim_{x\to 1}f(x)=0$

すなわち $f(0)=0$，$f(1)=0$

よって，$f(x)$ は x，$x-1$ を因数にもつ 3 次関数であるから

$f(x)=x(x-1)(ax+b)$ $(a\neq 0)$

とおける。

このとき $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}(x-1)(ax+b)=-b$

[1] から $-b=2$ ……①

また $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}x(ax+b)=a+b$

[2] から $a+b=3$ ……②

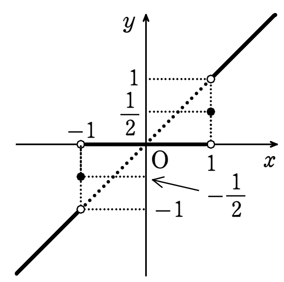
①，② から $a=5$，$b=-2$ 　 これは $a\neq 0$ を満たす。

したがって $f(x)=x(x-1)(5x-2)=5x^3-7x^2+2x$

［改訂版4プロセス数学Ⅲ 例題29］

関数 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$ について，$y=f(x)$ のグラフをかけ。また，$f(x)$ が不連続となる x の値を求めよ。

解答 ［図］，$f(x)$ は $x=\pm 1$ で不連続



解説

[1] $x^2<1$ すなわち $-1<x<1$ のとき

$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$ であるから $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=0$

[2] $x^2=1$ すなわち $x=\pm 1$ のとき

$x=1$ のとき $f(x)=\frac{1}{2}$，

$x=-1$ のとき $f(x)=-\frac{1}{2}$

[3] $x^2>1$ すなわち $x<-1$，$1<x$ のとき

$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$ であるから

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{\frac{1}{x^{2n}}+1}=x$

よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

また，$f(x)$ は $x=\pm 1$ で不連続である。